Práctica 1
Puntos Notables, Área, Semejanza y Trigonometria

1. Demostrar que XY es perpendicular a AB si y solo si $AX^2 - BX^2 = AY^2 - BY^2$.

2. Sea ABC un triángulo con $AB = 4$, $AC = 13$ y $BC = 15$. Si D es el pie de la altura de A en BC entonces calcular AD, BD y CD. Usar esto para calcular el área del triángulo.

   Repetir esta idea para calcular el área de un triángulo de lados 13, 37 y 40.

3. Sea ABC un triángulo con $B = 90°$. Si D es el pie de la altura de B en AC con $AD = 2$ y $DC = 8$ entonces

   (a) Calcular BD y el área del triángulo ABC.

   (b) Si M es el punto medio de la hipotenusa AC, calcular AM, BM y CM.

4. Dado un triángulo equilátero ABC demostrar que las dos rectas por A que dividen al lado opuesto en tres partes iguales tambien dividen a la semicircunferencia de diametro BC, exterior al triángulo, en tres partes iguales.

5. Sean ABC un triángulo con $BC = 9$, $AC = 12$ y $AB = 18$ entonces

   (a) Si D es el pie de la bisectriz de A en BC calcular BD y DC.

   (b) Si X es el punto de tangencia de la circunferencia inscripta con BC, calcular BX y XC.

   (c) Calcular el perimetro y el inradio del triángulo.

6. Sea ABC un triángulo con $AB = AC$ y $A\widehat{B}C = 30°$. Si el perímetro de ABC es 12, calcular su área.

7. Sea ABC un triángulo de lados a, b y c, perimetro p, inradio r y circunradio R. Demostrar las siguientes formulas:

$$[ABC] = \frac{b \cdot c \cdot \sin(B\widehat{A}C)}{2} = \frac{abc}{4R} = \frac{p \cdot r}{2} = \sqrt{\frac{a+b+c}{2}\frac{b+c-a}{2}\frac{a+c-b}{2}\frac{a+b-c}{2}}.$$

8. Dado un triángulo ABC con $BC = 39$, $AC = 41$ y $AB = 50$ calcular su inradio, su circunradio, la longitud de sus tres alturas, la longitud de sus tres medianas y sus tres angulos.

9. Sea ABC un triángulo. Si entre la altura, la bisectriz y la mediana desde el vertice A hay dos que coinciden entonces la tercera tambien y el triángulo resulta isósceles con $AB = AC$.

10. Probar que un triángulo con dos alturas iguales es isósceles. Resolver el mismo problema con alturas reemplazado por medianas. Vale lo mismo con las bisectrices?

11. Dado un triángulo ABC probar que

    (a) La mediatriz de BC es el lugar geometrico de los puntos P tales que $PB = PC$.

    (b) La bisectriz por el vertice A es el lugar geometrico de los puntos P a igual distancia de AB que de AC.

    (c) La altura por el vertice A es el lugar geometrico de los puntos P tales que $PB^2 - PC^2 = AB^2 - AC^2$.

    (d) La mediana por el vertice A es el lugar geometrico de los puntos P tales que $[ABP] = [ACP]$.

    Deducir que las mediatrices, las bisectrices, las alturas y las medianas de un triángulo se encuentran en un punto que se llama el circuncentro, el incentro, el ortocentro y el baricentro del triángulo ABC respectivamente.

12. Sea ABC un triángulo.

    (a) Probar que la bisectriz de $B\widehat{A}C$ y las bisectrices exteriores de $C\widehat{B}A$ y $A\widehat{C}B$ concurren en un punto I_A.
    (b) Probar que hay una circunferencia con centro en el punto I_A tangente al lado BC y a las prolongaciones de los lados AB y AC. Se llama la *circunferencia exinscrita* de ABC correspondiente al vértice A.
    (c) Sea D el punto de tangencia de la circunferencia inscrita con el lado BC y D' el punto de tangencia de la circunferencia exinscrita correspondiente a A con el lado BC. Probar que $BD = CD'$.

13. Sea ABC un triángulo y P un punto en su interior. Las rectas AP, BP y CP dividen al triángulo en seis triangulitos mas chiquitos.

    (a) Demostrar que si P es el baricentro entonces los seis triángulitos tienen la misma área.
    (b) Demostrar que si cinco de los triángulitos tienen la misma área entonces P es el baricentro.
    (c) Si cuatro de los seis triángulitos tienen la misma área ¿necesariamente P es el baricentro?

14. Una fila de hormigas marchan todas a la misma velocidad por un sendero rectilíneo. La distancia entre la primera y la última hormiga es de 15 metros. La hormiga inspectora, que camina mas rápido, recorre la fila comenzando desde la última hormiga, y cuando alcanza a la primera hormiga, regresa hasta encontrar nuevamente a la última hormiga. En el instante en que la encuentra, la última hormiga está exactamente a 8 metros del punto en el que la inspectora inició su recorrido. Determinar qué distancia caminó en total la inspectora durante su recorrido.

15. Ana y Beto salen a las 8 horas y 1 minuto desde el punto A hacia el punto B. Los dos corren a velocidad constante pero Ana va mas rápido que Beto. Cuando Ana llega al punto B, regresa de inmediato hacia A. Durante su regreso se cruza con Beto a las 8 horas y 7 minutos. Luego Ana llega hasta A y vuelve a salir hacia B y alcanza a Beto a las 8 horas y 12 minutos, antes de que Beto llegue a B. Calcular a que hora Beto llega a B.

16. Sea ABC un triángulo y P un punto interior tal que AP pasa por el punto medio de BC. Probar que si se tiene la igualdad $P\widehat{A}B = P\widehat{B}C$ entonces tambien se tiene la igualdad $P\widehat{A}C = P\widehat{C}B$.

17. En ABC sea D en AB con $AM = BM$ y E en BC con $BE = 2 \cdot CE$. Si $B\widehat{A}E = A\widehat{D}C$, calcular $B\widehat{A}C$.

18. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo. Probar que son equivalentes:

    (a) Los lados opuestos son iguales.
    (b) Los lados opuestos son paralelos.
    (c) Las diagonales se cortan en su punto medio.

    A un cuadrilátero que cumpla estas propiedades equivalentes lo llamaremos *paralelogramo*.

19. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo. Probar que son equivalentes:

    (a) Los cuatro lados son iguales.
    (b) Es un paralelogramo con diagonales perpendiculares.

    A un cuadrilátero que cumpla estas propiedades equivalentes lo llamaremos *rombo*.

20. Sean $ABCD$ un cuadrilátero convexo. Probar que son equivalentes:

    (a) Los lados AB y CD son paralelos.
    (b) Los triangulos ABC y ABD tienen igual área.
    (c) Si P es la interseccion de las diagonales entonces los triangulos APD y BPC tienen igual área.
    (d) Los puntos medios de AB y CD dividen al cuadrilatero en dos cuadrilateros de igual área.

    A un cuadrilátero que cumpla estas propiedades equivalentes lo llamaremos *trapecio* de bases AB y CD.

21. Consideremos un cuadrilátero convexo

    (a) Probar que los puntos medios de sus lados son vértices de un paralelogramo, *el paralelogramo de Varignon*, cuya área es la mitad del área del cuadrilátero original.
    (b) Probar que las diagonales lo dividen en cuatro triángulos cuyos baricentros son vértices de un paralelogramo.

22. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo, probar que tiene una circunferencia inscrita si y solo si las bisectrices de sus cuatro angulos interiores concurren. En este caso demostrar que $AB + CD = AD + BC$.

23. Sea $ABCD$ un trapecio de bases $AB = 25$ y $CD = 16$, se marcan P en AD y Q en BC tales que PQ es paralelo a AB y PB es paralelo a QD. Calcular PQ.

24. Sea $ABCD$ un paralelogramo y P un punto en el lado AB tal que $AP = 2 \cdot PB$. Si el punto Q es la intersección de AC con DP y el triángulo PCQ tiene área igual a 6, calcular el área del paralelogramo.

25. Sea $ABCD$ un trapecio con $AB//CD$ y $AB = 3CD$. Sea P la intersección de las diagonales y Q un punto en AB tal que $AQ = 6 \cdot QB$. Si el cuadrilátero $BCPQ$ tiene área igual a 30 calcular el área del trapecio.

26. Se tienen tres hormigas en los vértices de un cuadrado. En cada turno, una hormiga se puede mover en dirección paralela a la recta que determinan las otras dos.

    ¿Es posible que después de algunos turnos las hormigas ocupen tres puntos medios de los lados del cuadrado?

27. Sea $ABCDEF$ un hexagono convexo. Probar que son equivalentes

    (a) Los lados opuestos son iguales y paralelos.
    (b) Los lados opuestos son iguales y se tiene que $\widehat{A} + \widehat{C} + \widehat{E} = \widehat{B} + \widehat{D} + \widehat{F} = 360°$.

    Probar además que con copias de tales hexagonos se puede cubrir el plano sin huecos ni superposiciones.

28. Los siguientes problemas primero resolverlos utilizando trigonometria y despues buscar una solucion sin usar trigonometria

    (a) Sea $ABCD$ un cuadrado y P en su interior con $P\widehat{A}B = P\widehat{B}A = 15°$. Calcular $C\widehat{P}D$.
    (b) Sea $ABCDE$ un pentágono regular y P en su interior con $P\widehat{E}A = 48°$ y $P\widehat{C}B = 42°$. Calcular $A\widehat{P}B$.
    (c) Sea $ABCD$ un cuadrado y P en su interior con $PA = 1, PB = 2$ y $PC = 3$. Calcular $A\widehat{P}B$.

29. En un triángulo rectángulo ABC con $\widehat{B} = 90°$ sean P y Q puntos en AB con $B\widehat{A}P = P\widehat{A}Q = Q\widehat{A}C$ y tales que $CQ = 2 \cdot BP$. Calcular la medida de los ángulos del triángulo.

30. Sea ABC un triángulo con $B\widehat{A}C = 3 \cdot A\widehat{B}C$. Si $BC = 5$ y $CA = 3$ calcular AB.

31. Sea ABC un triángulo con $BC = a, AC = b, AB = c$. Probar que $a = b \cdot \cos(A\widehat{C}B) + c \cdot \cos(A\widehat{B}C)$.

32. Probar que para todo triángulo ABC vale que $r = 4R \cdot \sin(B\widehat{A}C/2) \cdot \sin(A\widehat{B}C/2) \cdot \sin(B\widehat{C}A/2)$.

33. Calcular $\cos 7\alpha$ en funcion de $\cos\alpha$. En general, demostrar por induccion en n que para todo n existe un polinomio $P_n(x)$ que es monico de grado n tal que $P_n(2\cos\alpha) = 2\cos(n \cdot \alpha)$.

34. Sea $PABC$ un tetraedro en el espacio tal que PA, PB y PC son mutuamente perpendiculares. Demostrar que la proyeccion ortogonal del punto P en el plano del triangulo ABC coincide con su ortocentro.

35. Sea $ABCD$ un tetraedro en el espacio con la propiedad de que sus cuatro caras tienen igual area. Probar que las cuatro caras del tetraedro son triangulos congruentes.